

Colle du 05/03 - Sujet 1
Polynômes et espaces vectoriels

Question de cours.

1. Définir le polynôme dérivé.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation $P(X^2) = (X^2 + 1)P$.

Exercice 1. Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $(X + 1)^{2026} + X^{2026} + 1$.

Exercice 2. La famille $(x \mapsto e^{kx})_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est-elle libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Colle du 05/03 - Sujet 2
Polynômes et espaces vectoriels

Question de cours.

1. Définir une famille génératrice.
2. Caractériser la multiplicité d'une racine par les dérivées.

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des polynômes P vérifiant $P'P'' = 18P$.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et $F = \{M \in E \mid \text{Tr}(M) = 0\}$. Montrer que F est un espace vectoriel et déterminer un supplémentaire à F dans E .

Colle du 05/03 - Sujet 3
Polynômes et espaces vectoriels

Question de cours.

1. Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.
2. Montrer que la somme de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in E \mid P(1) = P(2)\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E .

Exercice 2. Soit $a > 0$.

1. Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(X + a) - P(X) = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(X + a) - P(X) = X^2$.